



TITLE:

# Stolz HomomorphismとOricycle Homomorphism (Hardy空間と関連諸分野)

AUTHOR(S):

貴志, 一男

---

CITATION:

貴志, 一男. Stolz HomomorphismとOricycle Homomorphism (Hardy空間と関連諸分野). 数理解析研究所講究録 1977, 289: 82-95

ISSUE DATE:

1977-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/106145>

RIGHT:

# Stolz homomorphism と Oricycle homomorphism

和歌山大学 教育 貴志 一男

## §1 序

単位円板  $D$  上の有界正則関数の全体からなる Banach 環  $H^\infty(D)$  の極大イデアル空間を  $\bar{D}$  とする. 単位円  $C$  上の点  $1$  を原点とする Stolz 角領域  $A$  の  $\bar{D}$  における閉包  $\bar{A}$  に対し,  $\bar{A} \setminus A$  に属する点を Stolz homomorphism といい, Stolz homomorphisms の全体を  $S$  とする. ここでは,  $S$  は連結集合であること,  $S, \bar{S}$  はそれぞれ Gleason part の和集合であること, その他  $=, \neq$  の性質を述べる.

次に点  $1$  で単位円  $C$  に接する  $D$  内の二つの円によって囲まれる Oricycle 領域  $A$  に対し,  $\bar{A} \setminus A$  に属する点を Oricycle homomorphism といい, Oricycle homomorphisms の全体を  $O$  とするとき,  $S$  で述べたと同様の性質を  $O$  について考察する.

## §2 準備

Carlesonの結果から単位円板  $D$  は Banach 環  $H^\infty = H^\infty(D)$  の極大イデアル空間  $\bar{D}$  で稠密である。 $D$  上連続な関数  $f$  が  $\bar{D}$  上の連続な関数に拡張できるとし、この拡張した関数を  $\hat{f}$  で表す。 $u$  を  $D$  で上方(または下方)に有界な調和関数とし、 $v$  を  $u$  の共役調和関数とすると、 $f = \exp(u+iv)$  (または  $f = \exp(-u-iv)$ ) が  $H^\infty$  に属し、 $\hat{u} = \log |\hat{f}|$  (または  $\hat{u} = -\log |\hat{f}|$ ) を用いて、 $u$  を  $\bar{D}$  上の連続関数  $\hat{u}$  に拡張できる。

集合  $A (\subset \bar{D})$  の  $\bar{D}$  における閉包を  $\bar{A}$  で表す。また  $\bar{A} \cap (\bar{D} \setminus D)$  を  $A'$  で表す。とくに  $D' = \bar{D} \setminus D$  である。関数  $f(z) = z$  に対して  $D_\alpha = \{z \in D' : \hat{f}(z) = \alpha\}$  ( $|\alpha| = 1$ ) を点  $\alpha$  上の fiber という。

単位円周  $C$  上の Lebesgue 測度  $db$  による  $L^\infty(db)$  を  $L^\infty(C)$  で、 $L^\infty(C)$  の極大イデアル空間を  $X$  で表す。 $X \subset D'$  である。 $H^\infty$  の Gelfand 表現  $\hat{H}^\infty$  の  $X$  への制限  $\hat{H}^\infty|_X$  が  $X$  上の logmodular 環で、 $X$  は  $\hat{H}^\infty|_X$  の Šilov 境界である。 $H^\infty$  と  $\hat{H}^\infty|_X$  は同一視することができる。 $X_\alpha = X \cap D_\alpha$  とおく。

関数  $u^* \in L^\infty(C)$  の Poisson 積分

$$u(z) = P_z(u^*) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^*(e^{i\psi}) P_r(\theta - \psi) d\psi$$

$$z = re^{i\theta}, \quad 0 \leq r < 1, \quad P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

は  $D$  上の有界複素調和関数である。 $u^* \mapsto u^\circ = \hat{u}|_X$  によって定義される写像によって  $L^\infty(C)$  と  $C(X)$  は Banach 環として(等距離的)同型である。特に  $C$  上の Lebesgue 可測集合  $A$  の特性関

数  $u^* = \chi_A$  に対し,  $u^s$  は  $X$  上の開かつ閉な集合  $A^s = \{x \in X :$

$\hat{\chi}_A(x) = 1\}$  の特性関数である. この  $u^* = \chi_A$  に対し  $u = \mu(\cdot, A)$

すなわち  $u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \chi_A(e^{i\psi}) P_r(\theta - \psi) d\psi = \frac{1}{2\pi} \int_A P_r(\theta - \psi) d\psi = \mu(z, A)$

( $z$  における) は  $A$  の調和測度である.  $u^* \in L^\infty(C)$  に対し

$$u(z) = \int_C u^*(\xi) \mu(z, d\xi), \quad z \in D$$

が成立する.

$u^* \in L^\infty(C)$  とする. 上で述べた  $(u^*, u, u^s)$  と  $z \in \bar{D}$  に対し, 写像  $u^s \mapsto \hat{u}(z)$  は  $C(X)$  上の線形汎関数で,  $X$  上確率測度  $\nu(z, \cdot)$  によって

$$\hat{u}(z) = \int_X u^s(\xi) \nu(z, d\xi) = \int_X \hat{u}(\xi) \nu(z, d\xi), \quad z \in \bar{D}$$

と表される. 特に上式が  $u \in H^\infty$  に対し成立し,  $\nu(z, \cdot)$  は  $H^\infty$  に対するその表現測度である.  $X$  上の測度空間の  $*$ 弱位相によって  $\nu(z, \cdot)$  は  $z \in \bar{D}$  の連続関数である. 特に  $A^s$  が開かつ閉な集合であるときは  $\nu(\cdot, A^s)|_D = \mu(\cdot, A)$  が  $D$  上の調和関数で,  $\bar{D}$  上の連続関数  $\nu(\cdot, A^s) = \hat{\mu}(\cdot, A)$  に拡張できる.

$\mathbb{E}_1 = \{E \subset D : E^c \cap C = \{1\}\}$  (ここで  $E^c$  は平面上の  $E$  の閉包を表す. 以下同様) とおく. また  $z, w \in D$  に対し  $\chi(z, w) = \left| \frac{z-w}{1-\bar{z}w} \right|$  とおく.  $E \subset D$ ,  $0 < \delta < 1$  に対し

$$E^\delta = \{z \in D : \chi(s, z) < \delta \text{ for some } s \text{ in } E\}$$

とおく.  $E \in \mathbb{E}_1$  に対し,  $E' (= \bar{E} \setminus D)$  と交わる Carleson part

の全体からなる集合を  $\mathcal{P}(E)$  で表す. ときには  $\bigcup_{P \in \mathcal{P}(E)} P$  をまた

$\mathcal{P}(E)$  で表す.  $z, w \in \bar{D}$  が同じ Gleason part に属するときは  $z \sim w$  と表す.  $z \in \bar{D}$  を含む Gleason part を  $\mathcal{P}(z)$  とかく.

定理 2.1.  $E, F \in \mathcal{E}_1$  とする. このとき  $\mathcal{P}(E) \supset \mathcal{P}(F)$  であるための必要十分条件はある  $\delta$  ( $0 < \delta < 1$ ) が存在して  $E^\delta \supset F$  となることである. (Rosenfeld-Weiss [4], Theorem 3.2.)

### §3 Stolz homomorphism

定義.  $S_\alpha = \bigcup \{A' : A \text{ は } \alpha \in \mathbb{C} \text{ を頂点とする Stolz 角領域 } (\subset D_\alpha) \text{ に属する点 } z \text{ における Stolz homomorphism である}\}.$

以下  $S = S_1$  のみを取り扱う.

$D$  の有界調和関数である  $u(z) = \arg(1-z)$  ( $-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2}$ ) に対して

$$(3.1) \quad S = \{z \in D_1 : -\frac{\pi}{2} < \hat{u}(z) < \frac{\pi}{2}\}, \quad \{\hat{u}(z) : z \in S\} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

が成立する.

$M = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$  とおき,  $z \in D$  における  $M$  の調和測度を  $\mu(z, M)$  で表す.  $z_0 \in D$  に対して

$$\Gamma = \{z \in D : \mu(z, M) = \mu(z_0, M)\}$$

とおくと,  $\Gamma$  は三点  $-1, z_0, 1$  を通る円と  $D$  の共通部分である.

そして  $z \in \Gamma$  に対して  $\mu(z, M) = \frac{\delta}{\pi}$  ( $\delta \in (0, 1)$ ) である. ただし

$\delta$  は  $\Gamma$  と弧  $C \setminus M$  のなす角である.  $z \in \Gamma'$  とすると,  $z$  に収束するネット  $\{z_\alpha\} (\subset \Gamma)$  が存在して,  $\mu(z_\alpha, M) \rightarrow \nu(z, M_1^s)$

(ただし  $M_1^S = M^S \cap X_1$ ). よって  $\nu(z, M_1^S) = \frac{\delta}{\pi}$  である. これから  $S \subseteq \{z \in D_1 : 0 < \nu(z, M_1^S) < 1\}$  を得る.  $\supseteq$  も容易にわかり

$$(3.2) \quad S = \{z \in D_1 : 0 < \nu(z, M_1^S) < 1\}, \quad \{\nu(z, M_1^S) : z \in S\} = (0, 1)$$

が成立する.

(3.2) から次のことがわかる.

$$(3.3) \quad D_1 \setminus S = H^\infty\text{-hull}(M_1^S) \cup H^\infty\text{-hull}(X_1 \setminus M_1^S)$$

$$H^\infty\text{-hull}(M_1^S) \cap H^\infty\text{-hull}(X_1 \setminus M_1^S) = \emptyset.$$

補題 3.1.  $u(z) = \arg(1-z)$  ( $-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2}$ ) とする.

$\Gamma = \{z \in D : \operatorname{Re} z \geq 0, u(z) = \alpha\}$  ( $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) ならば  $\Gamma'$  は連結集合である.

証明.  $\Gamma_r = \Gamma \cap \{z \in D : |z-1| < r\}$  ( $0 < r < 1$ ) とおくと

$$\Gamma' = \bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r}$$

となる.  $\supseteq$  となること.  $\varphi \in \Gamma'$  に対し,  $\varphi$  に収束するネット  $\{\varphi_\alpha\} \subset \Gamma$  が存在する. このとき  $\varphi_\alpha(z) \rightarrow \varphi(z) = 1$  であるから, 任意の  $r > 0$  に対し, ある  $\alpha_0$  があって,  $\alpha \geq \alpha_0$  のとき  $|\varphi_\alpha(z) - 1| < r$ . ゆえに  $\varphi_\alpha \in \Gamma_r$ , ゆえに  $\varphi \in \overline{\Gamma_r}$ . ゆえに  $\Gamma' \subseteq \bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r}$ . 逆は  $\supseteq$  となること. 明らかに,  $(\bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r}) \cap D = \emptyset$ , ゆえに  $\bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r} \subset D'$ , ゆえに  $(\bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r}) \cap \overline{D} \subset D' \cap \overline{D}$  から  $\bigcap_{r>0} \overline{\Gamma_r} \subseteq \Gamma'$ .

いま  $\Gamma'$  が不連結集合であるとする,  $\Gamma' = A_1 \cup A_2$ ,  $A_1 \neq \emptyset$ ,

$A_2 \neq \emptyset$ ,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ,  $A_1, A_2$  はコンパクト集合となる。  
 このとき  $U(\Gamma') = U(A_1) \cup U(A_2)$ ,  $\overline{U(A_1)} \cap \overline{U(A_2)} = \emptyset$   
 となるものがある。ただし  $U(\Gamma')$ ,  $U(A_1)$ ,  $U(A_2)$  はそれぞれ  $\Gamma'$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  の  $\bar{D}$  近傍である。このとき, ある  $\Gamma_0$  が存在して,  
 $\Gamma' \subset \overline{\Gamma_0} \subset U(\Gamma')$  となり,  $\overline{\Gamma_0}$  は不連結集合となり, 矛盾である。  
 (証明終)

定理 3.2. (i)  $S$  は  $D'$  の開集合である。

(ii)  $S$  は連結集合である。

証明. (i) の証明. (3.2) 式から  $S = \{z \in D_1 : 0 < \nu(z, M_1^s) < 1\}$  であるから  
 $S$  は  $D_1$  の相対開集合である。また関数  $f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$  を  
 考えれば,  $D' \setminus D_1$  上で  $|f(z)| = 1$  であるから,  $\overline{D' \setminus D_1}$  上で  $|\hat{f}(z)| = 1$ 。  
 一方  $S$  上で  $f(z) = 0$  であるから  $\overline{S}$  上で  $\hat{f}(z) = 0$ 。よって

$$S \subset D' \setminus \overline{(D' \setminus D_1)} \subset D_1$$

ゆえに  $S$  は  $D'$  の開集合である。

(ii) の証明.  $u(z) = \arg(1-z)$  ( $-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2}$ ) とする。

$\Gamma = [0, 1)$  とおくとき,  $z_0 \in \Gamma'$  に対して

$$S = \bigcup_{w \in p(z_0)} T_w'$$

が成立する。ただし  $T_w$  は,  $\hat{u}(w) = \alpha$  とするとき,  $T_w = \{z \in D : \operatorname{Re} z \geq 0, u(z) = \alpha\}$  を満たす集合である。

なぜならば  $z$  が  $S$  に属するならば  $\hat{u}(z) = \beta$  ( $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$ )。

そこで  $T_\beta = \{z \in D : \operatorname{Re} z \geq 0, u(z) = \beta\}$  とするとき, ある  $\beta$  が存

在して,  $[0, 1)^\delta \supset \Gamma_1$ ,  $\Gamma_1^\delta \supset [0, 1)$  であるから, 定理 2.1 から  $\rho(\Gamma_1) = \rho([0, 1))$ . ゆえに  $\Gamma_1' \cap P(z_0) \neq \emptyset$ . ゆえに  $S \subseteq \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$ . また  $S \supseteq \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$  は明らかであるから,  $S = \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$  である.

$P(z_0)$  は連結集合であり (Wermer の埋め込み定理), 補題 3.1 から  $\Gamma_w'$  は連結集合であるから,  $S$  は連結集合である.

(証明終)

定理 3.3.  $D$  中での  $D_1$  の位相境界  $D_1 \cap \overline{(D \setminus D_1)}$  を  $C_B$  とすると,  $C_B$  は Gleason part の和集合である. (Weiss [6], p. 96).

$z \in D_1 \setminus C_B$  とすると,  $D$  中のある可算集合  $E$  で,  $E^d \cap C = \{z\}$  (すなわち  $E \in \mathcal{E}_1$ ) で,  $z \in \overline{E}$  を満たすものが存在する. (Weiss [6], p. 96)

$C_B \supset X_1$  である.

定理 3.4.  $D$  上の調和関数  $u$  が

$$u(z) = u(re^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \varphi) d\mu(\varphi)$$

と表されてい<sup>(3.4.1)</sup>て,  $a = \inf_D u > -\infty$ ,  $\mu(\{z\}) = 0$  を仮定する,

さらに  $B \in \mathcal{E}^1$  に対して  $\lim_{\substack{z \in B \\ |z| \rightarrow 1}} u(z) = a$  と仮定する.

このとき,  $A = \{z \in D_1 : \hat{u}(z) > a\}^{\sim}$  に対して  $D$  上の非常調和関数  $\hat{u}$  で,

$$\hat{u}(B) = 0, \quad \hat{u}(A) = +\infty$$



を満たすものが存在する。(Doob [1], p. 193)

注意.  $u$  が  $D$  で有界調和関数ならば, (円周上の Lebesgue 測度にかんして)ほとんどすべての  $\theta$  について  $u^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} u(re^{i\theta})$  が存在して,  $u^* \in L^\infty(T)$  から  $u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - \varphi) u^*(e^{i\varphi}) d\varphi$  である (Fatou の定理). よって  $d\mu = u^* d\lambda / 2\pi$  に対して  $\mu(\{1\}) = 0$  である.

定理 3.5. (i)  $z_0 \in S$  に対して  $P(z_0) \subset S$  である.

(ii)  $z_0 \in S$  とする.  $D$  上の調和関数  $u(z) = \arg(1-z)$  ( $-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2}$ ) に対し  $\{\hat{u}(z): z \in P(z_0)\} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  である. また  $z \in P(z_0)$  の表現測度  $\nu(z, \cdot)$  については  $\{\nu(z, M_1^S); z \in P(z_0)\} = (0, 1)$  である. ただし,  $M = \{e^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq \pi\}$  で  $M_1^S = \{x \in X: \hat{\chi}_A(x) = 1\} \cap D_1$  である.

(iii)  $z_0 \in \overline{S}$  に対して  $P(z_0) \subset \overline{S}$  である.

証明. (i) の証明.  $w \in D_1 \setminus S$  ならば  $\nu(w, M_1^S) = 1$  または  $\nu(w, X_1 \setminus M_1^S) = 1$  である.  $\nu(w, M_1^S) = 1$  ならば  $\nu(w, X_1 \setminus M_1^S) = 0$  である. 一方 (3.2) 式から,  $z \in S$  に対して  $\nu(z, X_1 \setminus M_1^S) > 0$ . よって  $\nu(z, \cdot)$  は  $\nu(w, \cdot)$  に関して絶対連続にならない. したがって  $z$  と  $w$  は同じ Gleason part に属さない.  $\nu(w, X_1 \setminus M_1^S) = 1$  としても同様の結論を得る.

(ii) の証明.  $P(z_0) \subset S$  であること (3.1) 式から

$$\{\hat{u}(z): z \in P(z_0)\} \subseteq (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$$

を得る。いま  $\hat{u}(z_0) = \alpha_0$  とし,  $\Gamma_0 = \{z \in D : \operatorname{Re} z \geq 0, u(z) = \alpha_0\}$  とすると  $\Gamma_0' \ni z_0$  である。任意の  $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  に対して  $\Gamma = \{z \in D : \operatorname{Re} z \geq 0, u(z) = \alpha\}$  とおく。このときある  $\delta$  ( $0 < \delta < 1$ ) が存在して  $\Gamma_0^\delta \supset \Gamma$  かつ  $\Gamma^\delta \supset \Gamma_0$  である。ゆえに定理 2.1 から  $\rho(\Gamma) = \rho(\Gamma_0)$ 。ゆえに  $\Gamma' \cap P(z_0) \neq \emptyset$ 。このとき  $w \in \Gamma' \cap P(z_0)$  に対して  $\hat{u}(w) = \alpha$ 。ゆえに  $\{\hat{u}(z) : z \in P(z_0)\} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  である。

$\{v(z, M_1^0) : z \in P(z_0)\} = (0, 1)$  なることも同様に証明できる。

(iii) の証明.  $\bar{S} \cap C_B = \emptyset$  であるから (定理 3.2 の (i) の証明参照), 定理 3.3 を用いて, 任意の  $z \in \bar{S}$  と任意の  $w \in C_B$  は同じ Gleason part に属さない, ゆえに任意の  $z \in \bar{S}$  と任意の  $w \in D_1 \setminus (\bar{S} \cup C_B)$  が同じ Gleason part に属さないことを示せばよい。

$u(z) = \arg(1-z)$  ( $-\frac{\pi}{2} < u(z) < \frac{\pi}{2}$ ) は  $D$  で有界調和関数である。  $A = \{z \in D_1 : -\frac{\pi}{4} < \hat{u}(z)\}^-$  とおき  $D_1 \setminus (A \cup C_B)$  に属する一点  $z_1$  をとる。

$z_1 \notin C_B$  よりある (可算) 集合で  $E^c \cap C = \{1\}$ ,  $\bar{E} \ni z_1$  を満たすものがある。よって  $z_1$  に収束するあるネット  $\{z_\alpha\} (C_E)$  が存在する。いま  $z_1$  のある  $\bar{D}$  近傍  $V(z_1)$  で  $V(z_1) \cap (A \cup C_B) = \emptyset$  を満たすものをとると, ある定数  $\alpha_0$  があって  $\alpha \geq \alpha_0$  ならば  $z_\alpha \in V(z_1)$ 。  $B = \{z_\alpha : \alpha \geq \alpha_0\} (C_D)$  に対し  $B^c \cap C = \{1\}$

で,  $\lim_{\substack{z \in B \\ z \rightarrow 1}} u(z) = -\frac{\pi}{2}$  である.

このとき  $D$  上の非常調和関数  $v$  で

$$\hat{v}(B') = 0, \quad \hat{v}(A) = +\infty$$

を満たすものが存在する (定理 3.4).  $v_1$  を  $v$  の共役調和関数

とし,  $f = \exp(-v - i v_1)$  とおくと,  $f \in H^\infty(D)$ ,  $\|f\| \leq 1$ ,

$$\hat{f}|_1 = \exp(-\hat{v}) = \begin{cases} 1 & (z = z_0) \\ 0 & (z \in A) \end{cases}$$

ゆえに,  $z_1$  と任意の  $z \in A$  は同じ Gleason part に属さない.

$u$  の代わりに  $u_1 = -u$  を用いることにより, 上と同様に

$$A_1 = \{z \in D_1 : \hat{u}_1(z) > -\frac{\pi}{2}\} \text{ とおくと, 任意の } z_1 \in D_1 \setminus (A_1 \cup C_B)$$

と任意の  $z \in A_1$  は同じ Gleason part に属さない,

$$\begin{aligned} \bar{S} &= \{z \in D_1 : -\frac{\pi}{2} < \hat{u}(z) < \frac{\pi}{2}\} \\ &= \{z \in D_1 : -\frac{\pi}{2} < \hat{u}(z)\} \cap \{z \in D_1 : \hat{u}(z) < \frac{\pi}{2}\} \\ &= A \cap A_1 \end{aligned}$$

$z_1 \in D_1 \setminus (\bar{S} \cup C_B)$  ならば  $z_1 \in D_1 \setminus (A \cup C_B)$  または  $z_1 \in D_1 \setminus (A_1 \cup C_B)$  であ

る.  $z_1 \in D_1 \setminus (A \cup C_B)$  ならば任意の  $z \in A$  に対して  $z_1 \not\sim z$ . おって

任意の  $z \in A \cap A_1$  に対し  $z_1 \not\sim z$ .  $z_1 \in D_1 \setminus (A_1 \cup C_B)$  としても同様に

任意の  $z \in A \cap A_1$  に対して  $z_1 \not\sim z$ . (証明終)

#### §4 Oricycle homomorphism

点 1 で単位円  $C$  に接する  $D$  内の円を点 1 における Oricycle

という。また点 1 における二つの Oricycle に囲まれる領域を点 1 における Oricycle 領域という。点 1 における一つの Oricycle  $\Gamma$  に対して  $\{z \in \Gamma : \operatorname{Im} z \geq 0\}$ ,  $\{z \in \Gamma : \operatorname{Im} z \leq 0\}$  をそれぞれ  $\Gamma$  の upper oricycle, lower oricycle という。点 1 における upper oricycle 領域, lower oricycle 領域も同様に定義する。

定義.  $O = \bigcup \{A' : A \text{ は点 1 における Oricycle 領域}\}$  に属する点を Oricycle homomorphism という。また,  $O^+ = \bigcup \{A' : A \text{ は点 1 における upper oricycle 領域}\}$  に属する点を upper Oricycle homomorphism という。  $O^- = \bigcup \{A' : A \text{ は点 1 における lower oricycle 領域}\}$  に属する点を lower Oricycle homomorphism という。

$O^+ \subset H^\infty\text{-hull } M_1^S$ ,  $O^- \subset H^\infty\text{-hull } (X_1 \setminus M_1^S)$  である。ただし  $M = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ ,  $M_1^S = \{x \in X : \hat{x}_M(x) = 1\}$  である。(3.3) 式参照)  $O = O^+ \cup O^-$ ,  $\overline{O^+} \cap \overline{O^-} = \emptyset$  であるから  $O$  は不連結である。

定理 4.1. (i)  $O^+$ ,  $O^-$  はそれぞれ  $D'$  の開集合である。

(ii)  $O^+$ ,  $O^-$  はそれぞれ連結集合である。

証明. (i) の証明.  $f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$  を考えると,  $D' \setminus D_1$  上では  $|\hat{f}(z)| = 1$  で,  $O = \{z \in D_1; 0 < |\hat{f}(z)| < 1\}$  であるから  $O = \{z \in D'; 0 < |\hat{f}(z)| < 1\}$  となり  $O$  が  $D'$  で開集合である。ゆえに  $O^+$ ,

$\bar{O}$  は  $D'$  の閉集合である。

(ii)  $z_0 \in O^+$  を一つ固定する。このとき、ある upper  
 Oricycle  $\Gamma_0$  が存在して  $\Gamma_0' \ni z_0$  である。  $w \in P(z_0)$  に対して  
 upper Oricycle  $\Gamma_w$  を次のように定義する。

$$\Gamma_w = \{z \in D; \operatorname{Im} z \geq 0, |f(z)| = c\}, \text{ ただし } c = |\hat{f}(w)|$$

(この  $\Gamma_w$  は中心  $(\frac{k}{k-1}, 0)$ , 半径  $\frac{1}{1-k}$  (ただし  $\log c = k$ ) の  
 upper Oricycle である) このとき

$$O^+ = \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$$

である。なぜならば  $z \in O^+$  ならば  $|\hat{f}(z)| = l$  ( $0 < l < 1$ )。

$\Gamma = \{z \in D; \operatorname{Im} z \geq 0, |f(z)| = l\}$  とおく。このときある  $\delta$  が存在して  
 $\Gamma_0^\delta \supset \Gamma$  であって  $\Gamma^\delta \supset \Gamma_0$  であるから、定理 2.1 から  $P(\Gamma)$

$= P(\Gamma_0)$ 。ゆえに  $\Gamma' \cap P(z_0) \neq \emptyset$ 。よってある  $w \in P(z_0)$

に対して  $\Gamma = \Gamma_w$ 。ゆえに  $O^+ \subseteq \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$ 。  $O^+ \supseteq \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$

は明らかであるから、 $O^+ = \bigcup_{w \in P(z_0)} \Gamma_w'$ 。

補題 3.1 と同様の証明により  $\Gamma_w'$  は連結集合であることが  
 わかり、これと  $P(z_0)$  の連結性から  $O^+$  の連結性を得る。

(証明終)

定理 4.2. (i)  $z_0 \in O^+$  に対して  $P(z_0) \subset O^+$  である。

(ii)  $z_0 \in O^+$  とする。関数  $f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$  に対して、  
 $\{|\hat{f}(z)|; z \in P(z_0)\} = (0, 1)$  である。

$\bar{O}$  に対しても同様なことが成立する。

証明, (i)の証明. まず  $z_0 \in O$  ならば  $P(z_0) \subset O$  となることを示す. このためには任意の  $w \in D_1 \setminus O$  と  $z_0$  が同じ Gleason 部分に属さないことを示せばよい.

$f(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$  に対して  $O = \{z \in D_1; 0 < |\hat{f}(z)| < 1\}$  であるから,  $|\hat{f}(w)| = 1$  または  $\hat{f}(w) = 0$  である.

(a)  $|\hat{f}(w)| = 1$  のとき,  $F = \frac{f - \hat{f}(z_0)}{1 - \overline{\hat{f}(z_0)}f}$  とおくと,  $F$  は  $H^\infty(D)$  に属する inner function である.  $\hat{F}(z_0) = 0$ ,  $|\hat{F}(w)| = 1$  であるから

$$\begin{aligned} \sigma(z_0, w) &= \sup \{ |\hat{f}(w)|; f \in H^\infty(D), \|f\| \leq 1, \hat{f}(z_0) = 0 \} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって  $z_0$  と  $w$  が同じ Gleason 部分に属さない.

(b)  $\hat{f}(w) = 0$  のとき.  $D$  で  $f \neq 0$  であるから Royden の補題 (Hoffman [2], Lemma 2.2) より,  $P(w)$  上で  $\hat{f} = 0$ . 他方  $0 < |\hat{f}(z_0)| < 1$ . ゆえに  $z_0 \notin P(w)$ .

以上から  $P(z_0) \subset O$  となることがわかった. 次に  $z_0 \in O^+$  ならば  $P(z_0) \subset O^+$  となること, これは  $O = O^+ \cup O^-$ ,  $\overline{O^+} \cap \overline{O^-} = \emptyset$  と  $P(z_0)$  の連結性から従う.

(ii)の証明.  $z_0 \in O^+$  ならば  $P(z_0) \subset O^+$  で,  $\{|\hat{f}(z)|; z \in O\} = (0, 1)$  なることから  $\{|\hat{f}(z)|; z \in P(z_0)\} \subseteq (0, 1)$  である.

ある upper orbit  $\Gamma_0$  が存在して  $\Gamma_0' \ni z_0$  である. 任意の  $c \in (0, 1)$  に対して  $\Gamma_c = \{z \in D; \operatorname{Im} z \geq 0, |\hat{f}(z)| = c\}$  とお

$\delta < 1$ ,  $\Gamma_1$  は upper arcycle である. このとき ある  $\delta$  ( $0 < \delta < 1$ ) が存在して  $\Gamma^\delta \supset \Gamma_1$ ,  $\Gamma_1^\delta \supset \Gamma$  である. ゆえに定理 2.1 から  $\rho(\Gamma) = \rho(\Gamma_1)$ . ゆえに  $\Gamma_1' \cap \rho(z_0) \neq \emptyset$ . ゆえに ある  $z \in \rho(z_0)$  に対して  $|\hat{f}(z)| = c$ . これから  $\{|\hat{f}(z)| : z \in \rho(z_0)\} = (0, 1)$  である. (証明終)

## 文 献

- [1] J. L. Dool, Boundary approach filters for analytic function. Ann. Inst. Fourier, 23 (1973), 187-217.
- [2] K. Hoffman, Bounded analytic functions and Gleason parts, Ann. Math. 86 (1967), 74-111.
- [3] A. Kerr-Lawson, A filter description of the homomorphisms of  $H^\infty$ , Canad. J. Math., 17 (1965), 734-757.
- [4] M. Rosenfeld and M. L. Weiss, Bounded analytic functions tending radially to zero, Proc. London Math. Soc., 18 (1968), 714-726.
- [5] —————, A function algebra approach to a theorem of Lindelöf, J. London Math. Soc., 2 (1970), 209-215.
- [6] M. L. Weiss, Some separation properties in sup-norm algebras of continuous functions, 93-97, in Function algebras, Scott, Foresman, 1966.